

张量分析 · 连续介质力学的数学语言

# 第1章 张量分析的物理与几何基础

---

从连续介质假设到柯西应力张量

徐翱 景泽 编著

# 本章核心问题与学习目标

## 本章核心问题

通过连续体内部一点可以作出无穷多个不同方向的截面，每个截面上都有不同的面力矢量。

**为什么只需要有限个分量，就能描述这一点的完整局部受力状态？**

## 学完本章后，你应能够

- 给出连续介质的尺度分离条件，解释局部平均的含义
- 根据截面法向识别面力矢量  $t(n)$
- 用量级分析解释柯西引理和四面体推导中体积项为何消失
- 按照约定解释任意应力分量  $\sigma_{ij}$
- 根据给定的  $\sigma$  和  $n$  计算面力、法向应力和剪应力
- 说明应力张量为什么是线性映射，而非九个互不相关的数

## 本书统一约定：输出—输入规则

矢量分量写成列向量，统一采用： $y_i = A_{ij} x_j$

第一指标  $i$  表示**输出分量**，第二指标  $j$  表示**输入方向**。

对应力张量： $t_i(n) = \sigma_{ij} n_j$ （第二下标  $j$  对应截面法向，第一下标  $i$  对应面力方向）

# 教学重点与难点

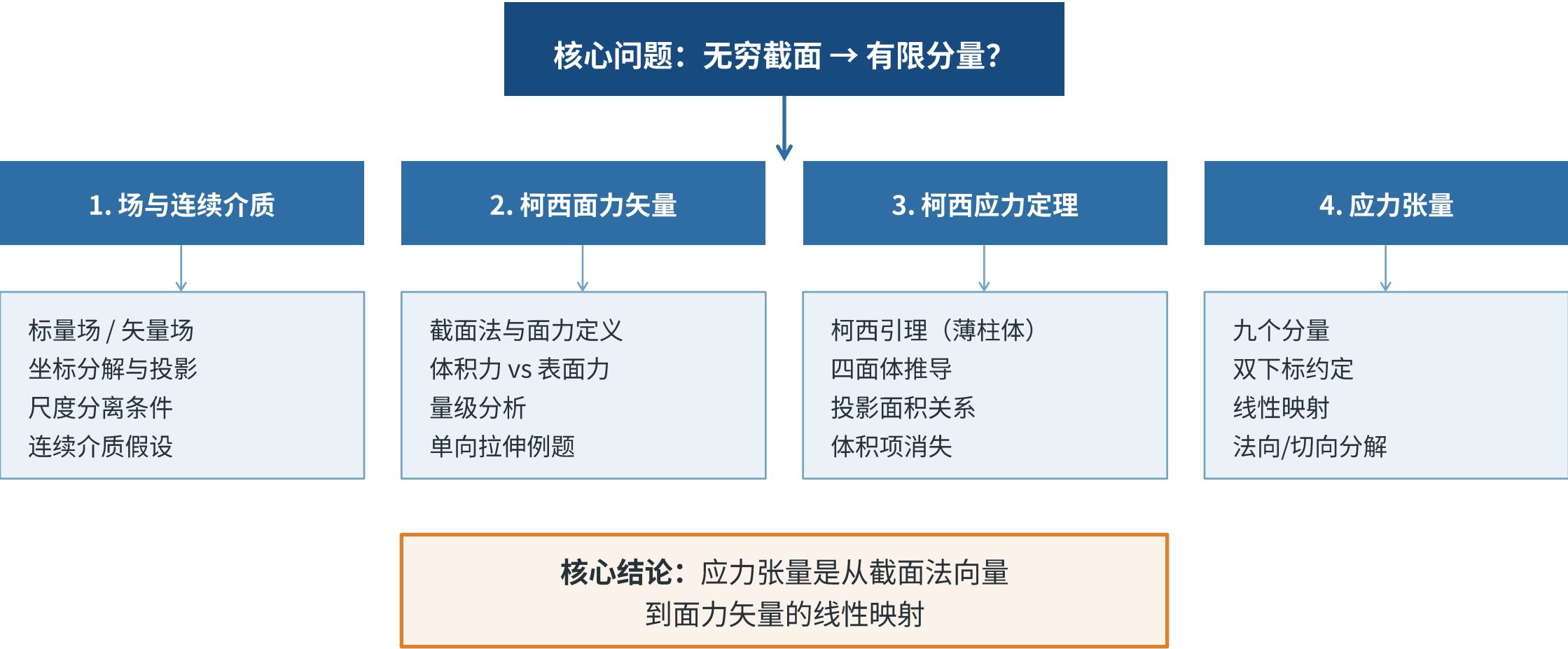
## 教学重点

- 连续介质假设的尺度分离条件与物理含义
- 面力矢量的定义及其对截面法向的依赖
- 柯西引理：相反法向上面力的作用反作用关系
- 柯西四面体推导：从平衡方程到应力张量
- 应力分量的双下标约定：先截面后方向
- 柯西应力公式： $t(n) = \sigma n$  的物理意义
- 应力张量的线性映射本质
- 面力的法向与切向分解

## 教学难点

- 理解量级分析在极限推导中的作用
- 区分物理实体与坐标分量（张量 vs 矩阵）
- 应力分量双下标的读法与几何对应
- 从"九个数字"到"线性映射"的认知跃迁
- 柯西四面体中投影面积与方向余弦的关系
- 应力对称性的来源（角动量平衡）
- 建立数学表达—物理图像—工程应用的关联

# 本章知识结构



# 工程导入：为什么需要张量？

## 工程场景：机翼根部的受力分析

飞机机翼根部承受复杂的气动载荷、惯性载荷和结构载荷

。

工程师需要回答：

机翼内部任意一点、任意方向的截面上，受力是多少？

## 面临的困难

通过一点可以作无穷多个不同方向的截面。

每个截面上的面力大小和方向都不同。

难道需要存储无穷多个面力矢量？

**柯西应力定理给出了答案：只需 9 个分量（应力张量），  
就能确定任意方向截面上的面力矢量**

**课堂思考：**如果你是工程师，你会用什么方法来描述一点的完整受力状态？

是测量每个方向的面力，还是寻找更简洁的数学表示？

# 标量场与矢量场

## 标量场 (Scalar Field)

标量在给定点只需一个实数及其量纲即可确定，不具有空间方向。

$$\phi = \phi(x, t) = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

### 典型实例：

- 航天器热防护系统温度场  $T(x, t)$
- 风洞中的压力场  $p(x, t)$
- 密度场  $\rho(x, t)$

## 矢量场 (Vector Field)

矢量同时具有大小和方向，并服从矢量加法规则。空间中每一点都对应一个矢量。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$$

### 典型实例：

- 流体速度场  $\mathbf{v}(x, t)$
- 固体位移场  $\mathbf{u}(x, t)$
- 单位质量体积力场  $\mathbf{b}(x, t)$

## 预测：坐标系旋转后，什么会改变？

**问题：**已知地面坐标系中某速度矢量  $\mathbf{v} = (20, 15) \text{ m/s}$ 。

现将坐标系逆时针旋转  $30^\circ$ ，得到新的机体坐标系。

请判断：旋转后，新分量  $v_1'$  和  $v_2'$  以及模长  $\|\mathbf{v}\|$  会如何变化？

### 请思考

**判断 1：**

$v_1'$  大于还是小于  $20 \text{ m/s}$ ？

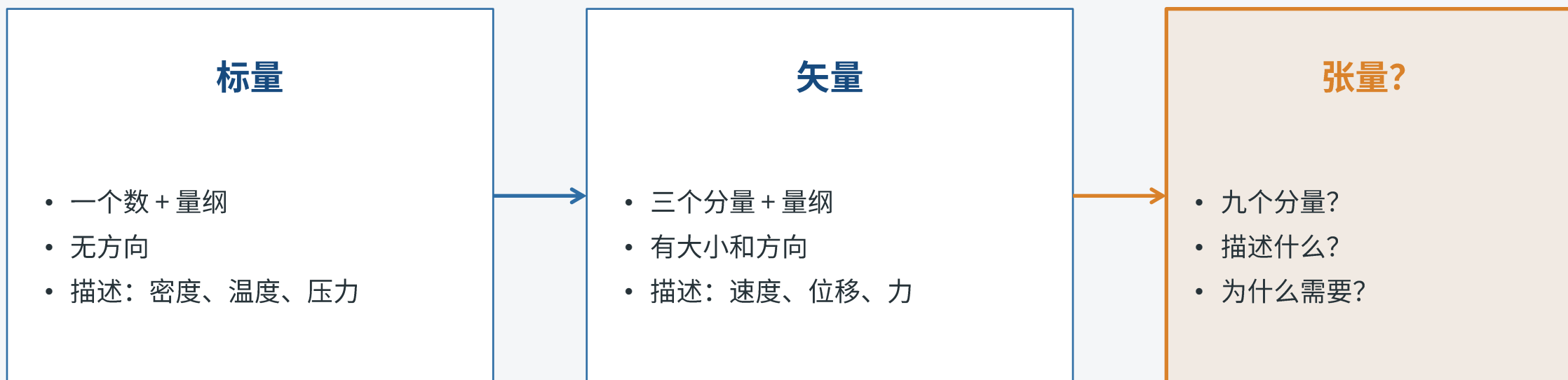
**判断 2：**

$v_2'$  为正还是负？

**判断 3：**

哪个量在变换后必须保持不变？

# 小结：标量与矢量够了吗？



## 连续体内部一点的完整受力状态还缺少什么？

标量与矢量能够描述许多工程物理量，但连续体内部一点的完整受力状态还包含"截面朝向"这一额外方向信息。下一节将从连续介质假设和截面法出发，定义这种新的局部受力量。

## 1.2 连续介质与柯西面力

# 连续介质假设与面力矢量

---

从微观离散到宏观连续 — 建立局部受力的数学描述

# 连续介质假设的尺度分离条件

## 核心必学：连续介质的尺度分离

固体和流体在微观上由离散粒子组成。连续介质假设不要求物质在任意尺度下均为连续分布；它要求在所研究的工程尺度上能够选取局部平均尺度  $\ell$ ，并满足：

$$\ell_{\text{micro}} \ll \ell \ll L$$

$\ell_{\text{micro}}$

分子平均间距、晶粒尺寸等微观尺度

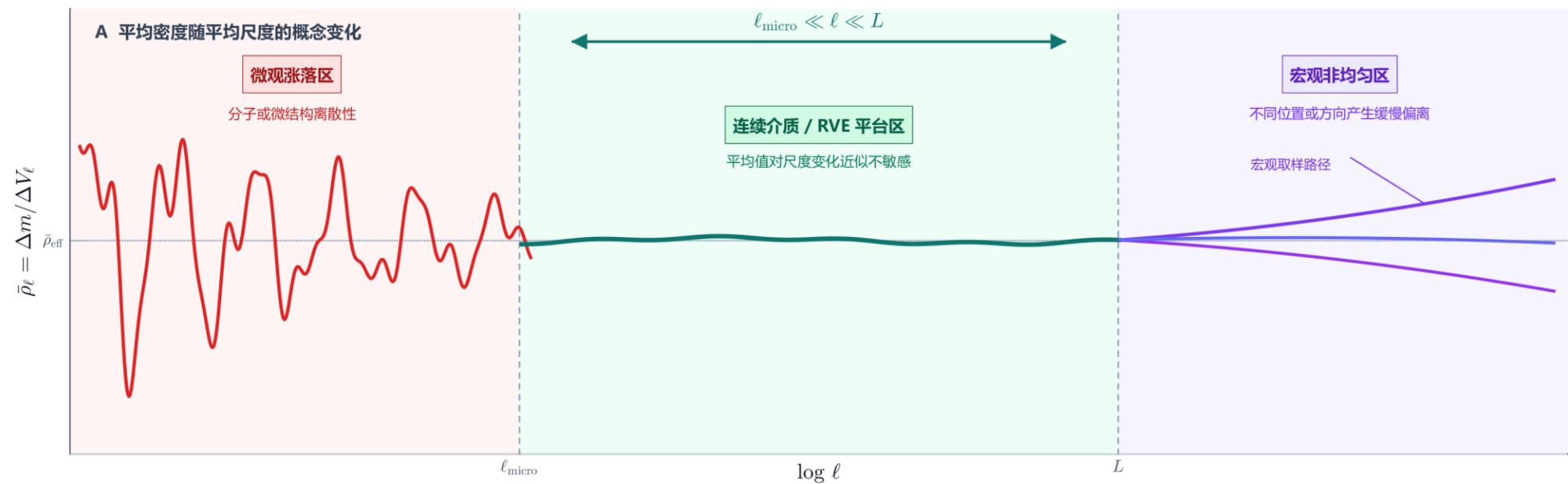
$\ell$

局部平均尺度（连续介质定义尺度）

$L$

结构或流场的宏观特征尺度

# 局部平均密度与尺度分离



**B 平台区内的平均窗口形状稳定性**

在相近尺度与等体积条件下，改变窗口形状不应显著改变局部平均值

圆形窗口 c

方形窗口 s

椭圆窗口 e

Equation:  $\bar{\rho}_\ell^{(c)} \approx \bar{\rho}_\ell^{(s)} \approx \bar{\rho}_\ell^{(e)}$

**! C 平台尺度不是普适常数**

平台范围取决于:

- 介质的微结构与统计特征
- 材料状态、温度与加载条件
- 允许误差与所需建模精度

因此只标注符号尺度，不给出固定长度数值

# 概念辨析：RVE 不是数学极限点

代表性体积元（Representative Volume Element, RVE）强调的是尺度分离与统计代表性，而不是把  $\Delta V$  严格地趋向某个固定的"最小体积"。

**均匀流体**

局部平均体积只需包含足够多的分子。  
由于分子运动的统计规律性，只要样本量足够大，平均值就稳定。

**非均匀复合材料 / 多晶材料**

RVE 还必须包含足够多的微观结构，使所得平均性质能够代表宏观材料。  
若微观尺度与工程特征尺度相当，连续介质模型可能失效。

## 柯西截面法与面力矢量

在连续体内部取一点 P，通过 P 作一个假想截面。这里讨论的是**定向截面**：

单位法向量  $n$  不只是几何平面的法线，还规定截面的定向，并取为所选物质部分在该截面上的外法向。

### 面力矢量的定义

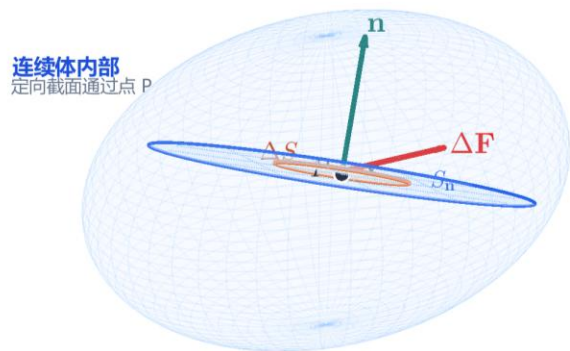
在法向为  $n$  的截面上，围绕 P 取一小面积  $\Delta S$ ，设其上合力为  $\Delta F$ 。

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = \lim (\Delta \mathbf{F} / \Delta S) \quad (\Delta S \rightarrow 0)$$

**量纲：**力除以面积，单位为帕斯卡 (Pa)  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

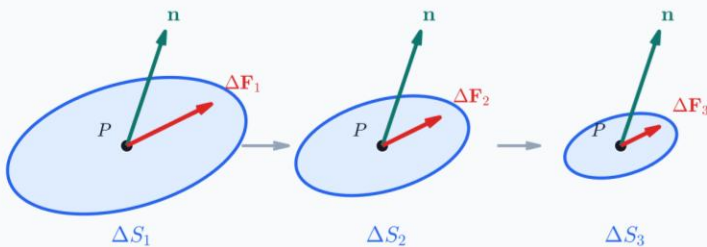
# 面力矢量的局部极限定义

A 连续体内部的定向截面与接触力



B 同向面元收缩：仅改变面积尺度

点 P 与法向 n 保持不变（时刻 t 固定）



$$\Delta S_1 > \Delta S_2 > \Delta S_3 \rightarrow 0$$

每个面元都以同一 P 为中心，并具有相同截面朝向

合接触力随面积缩小；其方向一般不与法向重合

C 面力矢量定义

$$\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

极限改变的是面元尺度，而不是考察点或截面朝向

$P = \mathbf{x}$   
位置固定

$\mathbf{n}$   
朝向固定

$t$   
时刻固定

$\Delta \mathbf{F} \nparallel \mathbf{n}$

面力包含法向与切向分量

## 体积力与表面力的量级分析

### 体积力 (Body Force)

作用于连续体内部每一质量微元，常用单位质量体积力  $b$  表示。

体积  $\Delta V$  上的体积力： $\rho b \Delta V$

典型实例：重力

### 表面力 (Surface Force)

作用于真实边界或内部假想截面。

面积  $\Delta S$  上的表面力： $t(n) \Delta S$

典型实例：接触力、压力

### 关键量级分析

若几何相似微元的特征尺寸为  $h$ ，则：

- 面积项（表面力）为  $O(h^2)$
- 体积力和惯性项为  $O(h^3)$

这一量级差异将在柯西四面体推导中使体积项在除以面积后趋于零。

## 判断：面力方向是否必须沿截面法向？

**问题：**一根直杆受轴向拉力。过杆内一点作一斜截面，  
该截面上的面力方向是否一定沿截面的法向？  
请先思考，再翻页查看答案和详细推导。

### 提示：从平衡角度思考

斜截面上的合力仍然沿杆轴方向（平衡要求），但截面的法向是倾斜的。  
因此，面力方向与截面法向之间存在夹角。

## 单向拉伸状态中斜截面上的面力

**模型假设：**等截面直杆，远离加载端，均匀单轴应力状态，拉应力为正。

轴向应力： $\sigma_0 = F_0 / A_0 > 0$

### 已知条件

- 轴向拉力： $F_0 \mathbf{e}_1$
- 横截面积： $A_0$
- 斜截面法向： $\mathbf{n} = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$
- $|\theta| < 90^\circ$

### 计算前先判断

- $\theta = 0$  时，剪应力是多少？
- $|\theta| = 45^\circ$  时，剪应力是否最大？
- 面力方向是否沿斜截面法向？

## 斜截面应力计算与结果

斜截面面积:  $A_0 = A_\theta \cos\theta \rightarrow A_\theta = A_0 / \cos\theta$

### 面力矢量与应力分解

#### 面力矢量

$$t(n) = (F_0 / A_\theta) e_1$$

$$= \sigma_0 \cos\theta e_1$$

方向: 沿杆轴方向

大小:  $\sigma_0 \cos\theta$

#### 法向应力

$$\sigma_n = t(n) \cdot n$$

$$= \sigma_0 \cos^2\theta$$

$\theta = 0$  时:  $\sigma_n = \sigma_0$

$\theta = 90^\circ$  时:  $\sigma_n = 0$

#### 剪应力大小

$$\tau_n = \sigma_0 |\sin\theta \cos\theta|$$

$\theta = 0$  时:  $\tau_n = 0$

$|\theta| = 45^\circ$  时:  $\tau_n$  最大

最大值:  $\sigma_0 / 2$

**重要结论:** 单向拉伸状态在斜截面上一般同时产生法向应力和剪应力

### 1.3 柯西应力定理

# 从面力矢量到应力张量

---

为什么只需要九个分量，就能描述无穷多个截面的受力？

## 核心问题：无穷截面 vs 有限分量

通过连续体内部一点可以作出无穷多个不同方向的截面，每个截面上都有不同的面力矢量。  
这是否意味着描述一点的局部受力状态需要无穷多个信息？

### 直觉回答

每个截面都有独立的面力矢量，  
所以需要无穷多个数才能描述一点的受力状态。  
这显然不便于计算和分析。

### 柯西的回答

只需要九个分量（应力张量），  
就能完全确定任意截面上的面力矢量。  
这就是柯西应力定理的核心结论。

## 柯西应力定理的核心命题

若连续介质在某点处于局部平衡，则该点的面力矢量  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  与截面法向  $\mathbf{n}$  之间存在线性关系：只需要知道三个坐标面上的面力矢量，就可以确定任意截面上的面力。

### 数学表达

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{t}(\mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{t}(\mathbf{e}_3)$$

**物理意义：**应力状态是一个线性映射——输入截面法向，输出面力矢量

# 推导主线：四步得到柯西公式



## 每一步的关键思想

- **柯西引理**：通过薄柱体的平衡，证明  $t(-n) = -t(n)$ ，即相反截面的面力大小相等、方向相反
- **四面体构造**：构造一个斜面和三个坐标面组成的四面体，建立斜面面力与坐标面面力的关系
- **动量平衡**：对四面体应用牛顿第二定律，利用量级分析说明体积项在极限下消失
- **结论**：斜面面力等于三个坐标面面力的线性组合，系数就是法向分量

# 柯西引理：薄柱体构造

取一个薄柱体，上下底面分别具有相反的外法向  $n$  和  $-n$ ，侧面为柱面。  
对这个薄柱体应用线动量平衡原理。

## 线动量平衡方程

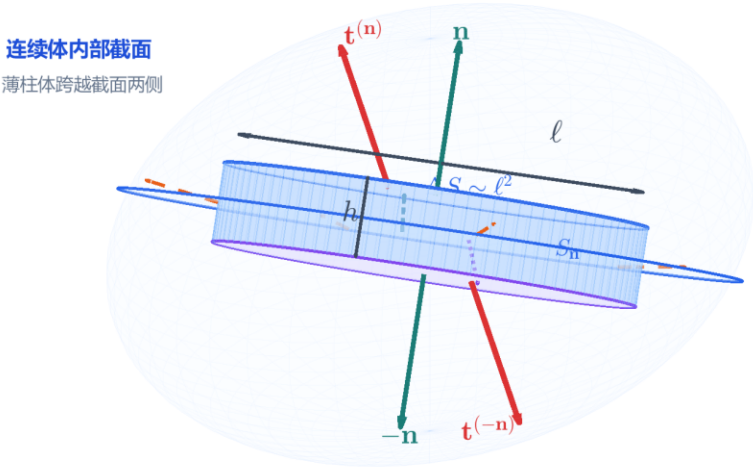
$$t(n) \Delta S + t(-n) \Delta S + \text{侧面力} + \rho b \Delta V = \rho a \Delta V$$

## 量级分析（双尺度极限）

令柱体高度  $h \rightarrow 0$ ，保持底面积  $\Delta S$  不变：  
• 底面面积项： $O(\Delta S)$  • 侧面力： $O(h \times \text{周长}) \rightarrow 0$  • 体积项： $O(h \Delta S) \rightarrow 0$

# 薄柱体尺度分析与柯西引理

A 跨越内部截面的极薄柱体



B 力项线型与尺度量级

$h/\ell \rightarrow 0$

- 主表面力  $O(\ell^2)$
- 侧面力  $O(\ell h)$
- 体积力  $O(\ell^2 h)$
- 惯性项  $O(\ell^2 h)$

$[t^{(n)} + t^{(-n)}] O(\ell^2) + O(\ell h) + O(\ell^2 h) = 0$

相对于主表面力:  
 $O(\ell h)/O(\ell^2) = O(h/\ell) \rightarrow 0$   
 $O(\ell^2 h)/O(\ell^2) = O(h) \rightarrow 0$

C 厚度极限与柯西引理

局部动量平衡  
 $\sum F = \rho a \Delta V$

$h/\ell \rightarrow 0$   
次阶项消失

$t^{(n)} + t^{(-n)} = 0$   
仅两主表面力保留

柯西引理  
 $t^{(-n)} = -t^{(n)}$   
相反法向对应相反面力

# 量级分析：为什么体积项消失

柯西引理和四面体推导中，体积项（体积力和惯性力）在极限下都会消失。  
这不是因为体积力不重要，而是因为它们与面积项的量级不同。

## 几何相似微元的尺度律

### 特征长度 $h$

所有几何相似的微元，  
如果特征长度为  $h$ ，则：

- 线度量： $O(h)$
- 面积量： $O(h^2)$
- 体积量： $O(h^3)$

### 除以面积后

将平衡方程除以面积：

- 面积项： $O(1)$
- 体积项： $O(h^3/h^2) = O(h)$

当  $h \rightarrow 0$  时，  
体积项相对于面积项趋于零

### 物理意义

在一点的局部尺度上，  
表面力主导平衡，  
体积力是高阶小量。  
这就是应力状态  
由表面力决定的原因。

## 柯西引理结论与物理意义

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$$

### 物理意义

- **作用与反作用：**柯西引理是牛顿第三定律在连续介质中的体现。截面两侧的物质相互作用，作用力大小相等、方向相反。
- **定向截面的重要性：**面力矢量依赖于截面的定向（外法向）。同一个几何平面，如果取相反的法向，面力方向也相反。
- **应力状态的对称性：**柯西引理为后续证明应力张量的对称性奠定了基础（角动量平衡将给出更严格的对称性条件）。

## 柯西四面体：构造与投影面积

在点 P 附近取一个四面体微元：三个面分别垂直于坐标轴，第四个斜面具有任意法向  $n$ 。  
斜面面积为  $\Delta S$ ，三个坐标面的面积可以通过投影关系得到。

### 投影面积关系

#### 几何关系

斜面  $\Delta S$  在坐标面上的投影，  
就是对应坐标面的面积：

$$\Delta S_1 = n_1 \Delta S$$

$$\Delta S_2 = n_2 \Delta S$$

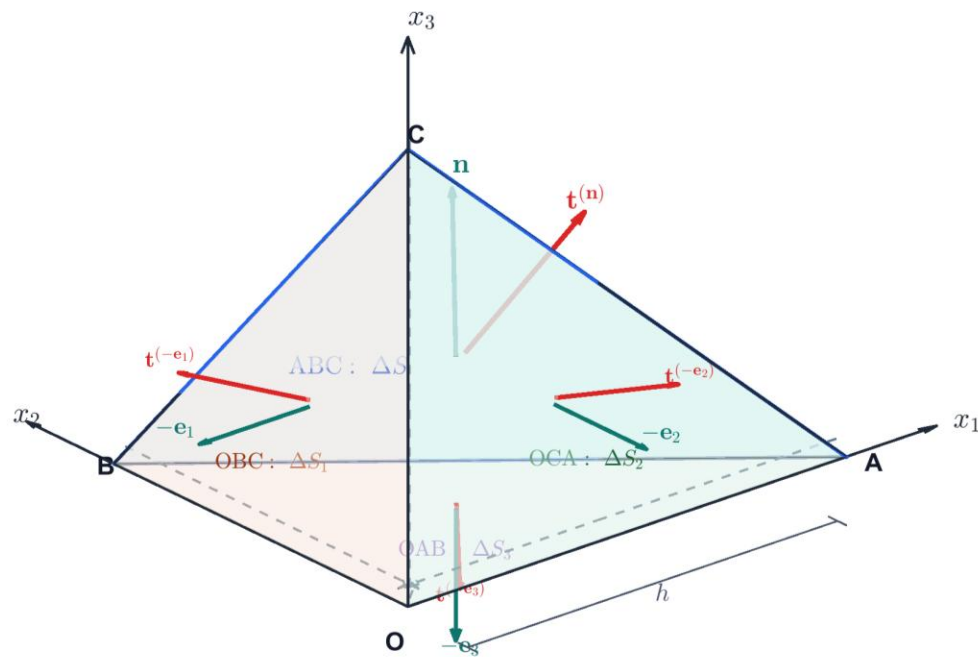
$$\Delta S_3 = n_3 \Delta S$$

#### 为什么重要？

投影面积关系把斜面面积  
和三个坐标面面积联系起来，  
这是建立斜面面力与坐标面  
面力之间关系的关键一步。

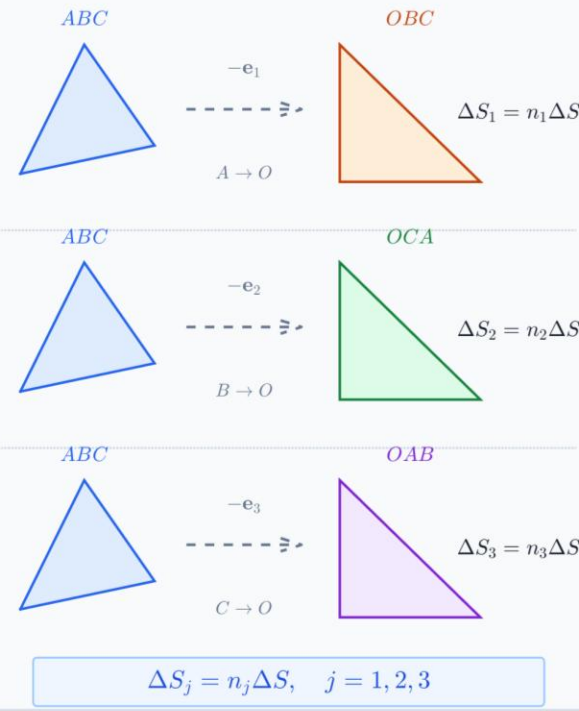
# 柯西四面体与投影面积

A 三维受力与四个表面



B 正投影面积关系

斜面 ABC 沿坐标方向投影到三个坐标面



C 局部平衡与极限

$$\mathbf{t}^{(n)}\Delta S + \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}^{(-\mathbf{e}_j)}\Delta S_j + \mathbf{b}\Delta V = \rho\mathbf{a}\Delta V$$

$$h \rightarrow 0: \quad \mathbf{t}^{(n)} + \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{t}^{(-\mathbf{e}_j)} = \mathbf{0}$$

$$\Delta S, \Delta S_j = O(h^2), \quad \Delta V = O(h^3)$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_j)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

## 四面体的线动量平衡

对四面体微元应用牛顿第二定律：所有表面力的合力 + 体积力 = 质量 × 加速度

### 平衡方程

$$t(n) \Delta S - t(e_1) n_1 \Delta S - t(e_2) n_2 \Delta S - t(e_3) n_3 \Delta S + \rho b \Delta V = \rho a \Delta V$$

### 各项说明

- $t(n) \Delta S$ : 斜面上的面力合力（外法向 $n$ ，正方向）
- $-t(e_j) n_j \Delta S$ : 三个坐标面上的面力合力（外法向指向负方向，所以有负号）
- $\rho b \Delta V$ : 体积力（重力等）
- $\rho a \Delta V$ : 惯性力（质量乘以加速度）

## 极限过程：体积项为何消失

将平衡方程两边除以斜面面积  $\Delta S$ ，然后令四面体特征尺寸  $h \rightarrow 0$ 。

### 除以面积后的方程

$$t(n) - n_1 t(e_1) - n_2 t(e_2) - n_3 t(e_3) + \rho b (\Delta V / \Delta S) = \rho a (\Delta V / \Delta S)$$

### 量级分析

面积项： $O(1)$

体积/面积： $\Delta V / \Delta S = O(h)$

当  $h \rightarrow 0$  时，体积项趋于零

**极限结果：**

$$t(n) = n_1 t(e_1) + n_2 t(e_2) + n_3 t(e_3)$$

这就是柯西应力公式！

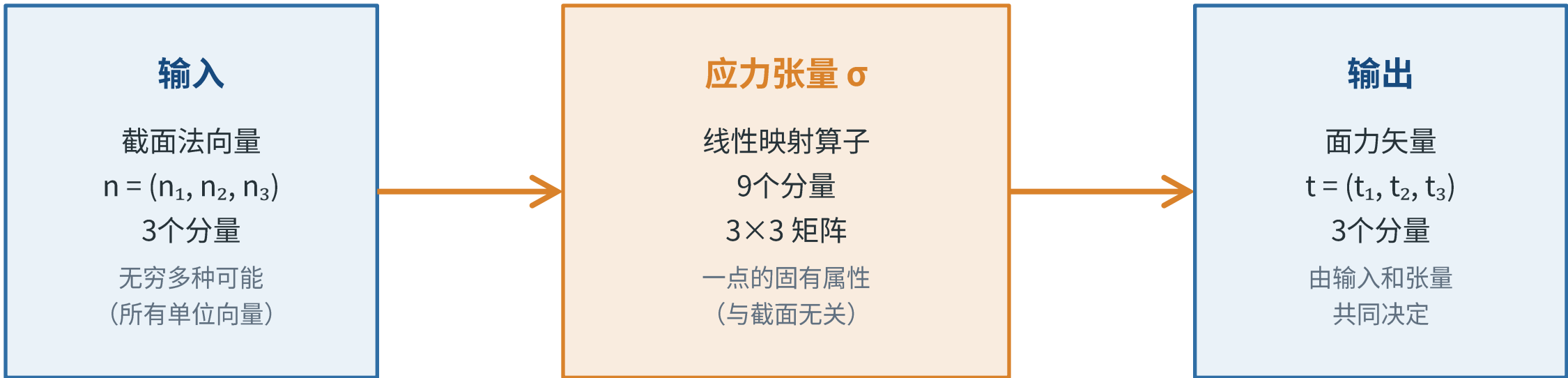
## 柯西公式：推导结果与意义

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{t}(\mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{t}(\mathbf{e}_3)$$

### 核心意义

- **从无穷到有限：**一点有无穷多个截面，但只需要知道三个坐标面上的面力矢量，就能确定任意截面上的面力。
- **线性关系：**面力矢量  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  与法向矢量  $\mathbf{n}$  之间是线性关系，这就是应力张量的物理本质。
- **九个分量：**三个坐标面，每个面有三个面力分量，总共九个独立的应力分量。
- **普适性：**这个结论不依赖于具体的材料性质，只依赖于平衡原理，是连续介质力学的基本定理。

# 物理映射：从法向量到面力矢量



**核心思想：**应力张量不是九个互不相关的数，而是一个线性算子。它接受一个法向量作为输入，输出对应的面力矢量。这就是二阶张量的物理意义。

## 思考：为什么9个数能描述无穷多截面？

**问题：**一点有无穷多个不同方向的截面，每个截面都有不同的面力矢量。  
为什么只需要9个应力分量，就能完全描述所有截面的面力？

### 请从以下角度思考

#### 数学角度

线性映射的自由度是多少？  
三维空间中，从一个矢量到另一个矢量的线性变换有几个独立参数？

#### 物理角度

平衡原理施加了什么约束？  
为什么不同截面的面力不能各自独立？

#### 几何角度

任意向量如何用基向量表示？  
这与应力张量有什么关系？

# 应力分量与双下标约定

三个坐标面上的面力矢量各有三个分量，总共九个应力分量，记为  $\sigma_{ij}$ 。  
双下标的含义是理解应力张量的关键。

## 本书约定：输出—输入规则

**第二下标  $j$  = 输入**

表示截面的法向方向，  
即应力分量所在的截面。

$j = 1 \rightarrow$  垂直于  $x_1$  轴的面  
 $j = 2 \rightarrow$  垂直于  $x_2$  轴的面  
 $j = 3 \rightarrow$  垂直于  $x_3$  轴的面

**第一下标  $i$  = 输出**

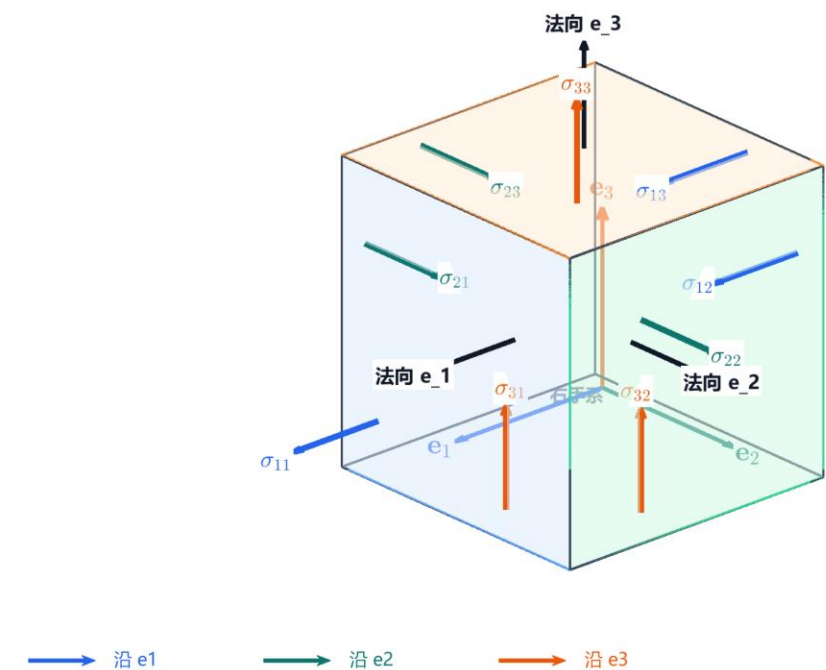
表示面力分量的方向，  
即应力分量指向哪个坐标轴。

$i = 1 \rightarrow x_1$  方向分量  
 $i = 2 \rightarrow x_2$  方向分量  
 $i = 3 \rightarrow x_3$  方向分量

**记忆口诀：**先找截面（第二下标），再看方向（第一下标）

# 应力立方体与九个分量

A 三个正向坐标面



B 应力矩阵：列由截面法向确定

第一下标 i: 方向  $e_i$  | 第二下标 j: 法向  $e_j$

| 截面法向  | $e_1$<br>第 1 列 | $e_2$<br>第 2 列 | $e_3$<br>第 3 列 |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| $e_1$ | $\sigma_{11}$  | $\sigma_{12}$  | $\sigma_{13}$  |
| $e_2$ | $\sigma_{21}$  | $\sigma_{22}$  | $\sigma_{23}$  |
| $e_3$ | $\sigma_{31}$  | $\sigma_{32}$  | $\sigma_{33}$  |

$t^{(e_1)}$   
 $= [\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}]^T$

$t^{(e_2)}$   
 $= [\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}]^T$

$t^{(e_3)}$   
 $= [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}]^T$

第 j 列对应法向为  $e_j$  的截面面力

C 逐面核对：面法向—三个分量箭头—矩阵列—图注完全一致

| 截面          | 外法向     | 三个分量箭头 (均沿第一下标方向)                                                                 | 矩阵列                                           | 核对    |
|-------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------|
| 法向 $e_1$ 的面 | $+ e_1$ | $\sigma_{11} \parallel e_1, \sigma_{21} \parallel e_2, \sigma_{31} \parallel e_3$ | $[\sigma_{11} \ \sigma_{21} \ \sigma_{31}]^T$ | 通过：一致 |
| 法向 $e_2$ 的面 | $+ e_2$ | $\sigma_{12} \parallel e_1, \sigma_{22} \parallel e_2, \sigma_{32} \parallel e_3$ | $[\sigma_{12} \ \sigma_{22} \ \sigma_{32}]^T$ | 通过：一致 |
| 法向 $e_3$ 的面 | $+ e_3$ | $\sigma_{13} \parallel e_1, \sigma_{23} \parallel e_2, \sigma_{33} \parallel e_3$ | $[\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33}]^T$ | 通过：一致 |

## 读图规则：两步识别应力分量

### 第一步：找截面

看第二下标  $j$ ：

- $j = 1 \rightarrow x_1$  面
- $j = 2 \rightarrow x_2$  面
- $j = 3 \rightarrow x_3$  面

确定应力分量在哪个截面上。

### 第二步：看方向

看第一下标  $i$ ：

- $i = 1 \rightarrow x_1$  方向
- $i = 2 \rightarrow x_2$  方向
- $i = 3 \rightarrow x_3$  方向

确定应力分量指向哪个方向。

### 实例练习

$\sigma_{23}$ ：第二下标是3  $\rightarrow$  在 $x_3$ 面上；第一下标是2  $\rightarrow$  沿 $x_2$ 方向。

所以  $\sigma_{23}$  是  $x_3$  截面上的面力矢量在  $x_2$  方向的分量（剪应力）。

# 文献约定差异：两种下标体系

不同教材和文献中，应力分量的下标约定可能不同。阅读时需注意区分。

## 本课程约定（输出—输入）

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

- 第一下标  $i$ ：面力方向（输出）
- 第二下标  $j$ ：截面法向（输入）
- 矩阵第  $j$  列 =  $j$  截面的面力
- 行对应力方向，列对应截面
- 与矢量列向量表示一致

## 另一种常见约定

$$t_j = \sigma_{ij} n_i$$

- 第一下标  $i$ ：截面法向
- 第二下标  $j$ ：面力方向
- 矩阵第  $i$  行 =  $i$  截面的面力
- 行对应截面，列对应力方向
- 常见于部分固体力学教材

**注意：**两种约定给出的矩阵互为转置。阅读文献时务必先确认作者的下标约定。

## 柯西应力公式：指标形式与矩阵形式

指标形式（爱因斯坦求和约定）

$$t_i(n) = \sigma_{ij} n_j$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

简洁记法： $t(n) = \sigma \cdot n$  或  $t = \sigma n$ （矢量与张量的点积）

# 概念辨析：三个层次的物理量

## 面力矢量 $t(n)$

**是什么：** 矢量  
**分量数：** 3个  
**依赖什么：** 依赖于截面方向 $n$   
**描述什么：** 特定截面上单位面积的作用力  
**量纲：** 力/面积 (Pa)  
**注意：** 不是一点的固有属性，而是特定截面的属性

## 应力张量 $\sigma$

**是什么：** 二阶张量（线性算子）  
**分量数：** 9个  
**依赖什么：** 与截面无关，是一点的固有属性  
**描述什么：** 一点的完整受力状态  
**量纲：** 力/面积 (Pa)  
**注意：** 是从法向量到面力矢量的映射

## 应力分量 $\sigma_{ij}$

**是什么：** 标量（一个数）  
**分量数：** 1个  
**依赖什么：** 依赖于坐标系选择  
**描述什么：** 特定截面、特定方向的应力值  
**量纲：** 力/面积 (Pa)  
**注意：** 是张量在特定坐标系下的分量表示

## 二阶张量：从矢量到矢量的线性映射

应力张量不是九个孤立的数，而是一个线性算子。  
它接受一个矢量（截面法向）作为输入，输出另一个矢量（面力）。

### 线性映射的两个基本性质

#### 可加性

$\sigma(n_1 + n_2) = \sigma n_1 + \sigma n_2$   
两个法向量之和对应的面力，  
等于两个法向量分别对应  
面力的矢量和。

#### 齐次性

$\sigma(\alpha n) = \alpha(\sigma n)$   
法向量缩放  $\alpha$  倍，  
对应的面力矢量也缩放  $\alpha$  倍。  
(注意： $n$  是单位向量，  
这是抽象线性性质)

**推广：**所有二阶张量本质上都是从矢量到矢量的线性映射，这是张量的统一定义。

## 面力的法向与切向分解

面力矢量  $t(n)$  可以分解为沿截面法向的分量（正应力）和沿截面切向的分量（剪应力）。

### 分解公式

#### 法向应力（正应力）

$$\sigma_n = t(n) \cdot n$$

$$= n \cdot \sigma \cdot n$$

$$= n_i \sigma_{ij} n_j$$

拉应力为正，压应力为负

方向：沿截面法向

#### 切向应力（剪应力）

$$\tau(n) = t(n) - \sigma_n n$$

大小：  $|\tau| = \sqrt{|t|^2 - \sigma_n^2}$

方向：在截面平面内

与材料的剪切变形和

塑性流动密切相关

# 应力张量何时对称

在经典连续介质力学中，应力张量通常是对称的，即  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。  
但这不是张量的固有性质，而是由角动量平衡（动量矩平衡）导出的结果。

## 对称的条件

### 对称的情况

- 无体积力偶（无分布力矩）
- 微元体角动量平衡
- 经典连续介质力学
- 独立分量：6个（不是9个）

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}, \sigma_{23}=\sigma_{32}$$

### 可能不对称的情况

- 存在分布力偶（偶应力）
- 微极弹性理论
- 具有自旋的颗粒介质
- 独立分量：9个  
(本课程不讨论)

**本课程约定：**除非特别说明，默认应力张量是对称的，只有6个独立分量。

## 机翼根部截面的应力分析

**工程背景：**某型飞机机翼根部截面，已知应力张量分量。  
需要计算某一斜截面上的面力、正应力和剪应力，评估结构安全性。

### 已知条件

应力张量（单位：MPa）：

$$\sigma_{11} = 200, \sigma_{12} = 50, \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{21} = 50, \sigma_{22} = -50, \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{31} = 0, \sigma_{32} = 0, \sigma_{33} = 0$$

斜面法向： $n = (0.6, 0.8, 0)$

### 待求

1. 斜截面上的面力矢量  $t$
2. 法向应力  $\sigma_n$
3. 剪应力大小  $|\tau|$

## 计算实践：单向拉伸的截面应力

用 Python/NumPy 计算单向拉伸状态下，不同角度截面上的正应力和剪应力。

### 核心代码

```
import numpy as np
# 单向拉伸应力张量 (MPa)
sigma = np.array([[100, 0, 0],
[0, 0, 0],
[0, 0, 0]])
# 斜面法向 (与x轴成30度)
theta = np.radians(30)
n = np.array([np.cos(theta), np.sin(theta), 0])
# 柯西应力公式:  $t = \sigma \cdot n$ 
t = sigma @ n
sigma_n = np.dot(n, t) # 正应力
tau = np.sqrt(np.dot(t, t) - sigma_n**2) # 剪应力
```

## 计算结果与物理图像

### $\theta = 30^\circ$ 时的计算结果

面力矢量  $\mathbf{t} = (86.6, 0, 0)$  MPa

正应力  $\sigma_n = 75.0$  MPa | 剪应力  $|\tau| = 43.3$  MPa

### 物理图像：应力随角度的变化

- $\theta = 0^\circ$  (横截面)：正应力最大 (100 MPa)，剪应力为零
- $\theta = 45^\circ$ ：正应力为50 MPa，剪应力达到最大值 (50 MPa)
- $\theta = 90^\circ$  (纵截面)：正应力为零，剪应力为零
- 工程意义：延性材料的屈服通常发生在剪应力最大的45°截面上

## 通用截面应力分析函数

将截面应力分析封装为通用函数，输入应力张量和法向量，输出面力、正应力和剪应力。

### 函数定义

```
def stress_on_plane(sigma, n):  
    """计算指定截面上的应力  
    参数: sigma (3x3应力张量), n (截面单位法向量)  
    返回: t (面力矢量), sigma_n (正应力), tau (剪应力)  
    """  
    n = n / np.linalg.norm(n) # 单位化  
    t = sigma @ n # 柯西公式  
    sigma_n = np.dot(n, t) # 正应力  
    tau = np.sqrt(np.dot(t, t) - sigma_n**2) # 剪应力  
    return t, sigma_n, tau
```

## 验证测试：坐标面的特殊情况

用坐标面 ( $n = e_1, e_2, e_3$ ) 测试函数，验证结果是否与应力矩阵的列一致。

### 测试代码与预期结果

```
# 测试x1面 (n = [1, 0, 0])
n1 = np.array([1, 0, 0])
t1, s1, tau1 = stress_on_plane(sigma, n1)
print("x1面面力:", t1)
# 预期: [sigma[0,0], sigma[1,0], sigma[2,0]]

# 测试x2面 (n = [0, 1, 0])
n2 = np.array([0, 1, 0])
t2, s2, tau2 = stress_on_plane(sigma, n2)
print("x2面面力:", t2)
# 预期: [sigma[0,1], sigma[1,1], sigma[2,1]]
```

### 为什么要做验证？

- 验证代码的正确性
- 建立对理论的信心
- 理解矩阵列的物理意义
- 培养科学计算的验证习惯
- 边界情况测试是基本素养

## 代码结果预测：剪应力最大值在哪里？

**问题：**对于单向拉伸应力状态（ $\sigma_{11} = 100 \text{ MPa}$ ，其余为零），  
在哪个角度的截面上，剪应力达到最大值？最大值是多少？

请先预测，再用代码验证

### A. $0^\circ$ 截面

剪应力最大  
最大值 = 100 MPa

（横截面上）

### B. $45^\circ$ 截面

剪应力最大  
最大值 = 50 MPa

（斜截面上）

### C. $90^\circ$ 截面

剪应力最大  
最大值 = 0 MPa

（纵截面上）

# 数字赋能的教学意义

## 从抽象到具体

把抽象的张量公式  
变成可执行的代码，  
让学生通过计算  
直观感受物理规律。

## 从验证到探索

先用代码验证理论，  
再用代码探索新问题，  
培养主动探究的  
学习习惯。

## 从理论到工程

建立计算思维，  
为后续有限元、CFD  
等工程计算  
打下基础。

### 课程思政融入：

张量分析是连续介质力学的数学基础，而计算力学是现代工程设计的核心工具。  
掌握张量分析与数值计算，是航空航天、装备制造等国家重大工程领域人才的必备能力。  
扎实的数理基础 + 熟练的计算技能 = 解决复杂工程问题的底气。

## 概念判断：下列说法是否正确？

1. 应力张量是九个互不相关的数，排成一个矩阵只是为了方便。

2. 面力矢量  $t(n)$  是一点的固有属性，与截面方向无关。

3. 连续介质假设要求分子尺度远小于问题的特征尺度。

**评价目的：**检查学生是否建立了正确的张量概念，能否区分张量与其分量表示。

**对应教学目标：**理解应力张量作为线性映射的物理本质。

## 分量识别： $\sigma_{23}$ 表示什么？

**问题：**按照本书的"输出—输入"约定，应力分量  $\sigma_{23}$  表示什么？

**A.**  $x_2$  截面上的面力  
在  $x_3$  方向的分量  
(第一下标 = 截面)

**B.**  $x_3$  截面上的面力  
在  $x_2$  方向的分量  
(第二下标 = 截面)

**进一步思考：**

如果应力张量是对称的 ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ )，那么  $\sigma_{23}$  和  $\sigma_{32}$  有什么关系？  
这是否意味着两种下标约定在对称情况下结果相同？为什么？

## 推导补全：柯西四面体的关键步骤

**问题：**在柯西四面体推导中，为什么体积力项在极限下可以忽略？请选择最准确的解释。

**A.**因为体积力（如重力）在连续介质中不重要，主要受力是表面力。

**B.**因为体积与面积的量级不同，当特征尺寸趋于零时，体积项相对于面积项是高阶小量。

**C.**因为我们假设了静态平衡，所以加速度为零，体积力自然消失。

## 工程情境：低碳钢拉伸屈服分析

**情境：**一根低碳钢圆棒受单向拉伸，当拉应力达到屈服强度  $\sigma_s$  时发生屈服。实验观察到，屈服面与轴线约成  $45^\circ$  角。请用本章知识解释这一现象。

### 分析思路提示

#### 第一步

写出单向拉伸的  
应力张量矩阵

(只有  $\sigma_{11}$  非零)

#### 第二步

计算不同角度截面的  
正应力和剪应力

(用柯西公式)

#### 第三步

找到剪应力最大的  
截面角度

( $45^\circ$  截面)

# 易错点回顾：最容易混淆的5个问题

1. **应力张量 vs 应力分量**：张量是几何实体（线性映射），分量是张量在特定坐标系下的表示。

2. **面力 vs 应力**：面力是特定截面的属性（依赖 $n$ ），应力张量是一点的固有属性（与截面无关）。

3. **双下标的顺序**：本书约定"输出—输入"（ $i$ =面力方向， $j$ =截面法向），不同文献可能不同。

4. **体积项消失的原因**：是量级分析（ $h \rightarrow 0$ 时体积/面积 $\rightarrow 0$ ），不是因为体积力不重要。

5. **RVE的含义**：代表性体积元是物理概念（尺度分离），不是数学上的"无穷小点"。

# 本章核心概念回顾

## 连续介质假设

尺度分离:  $\ell_{\text{micro}} \ll \ell \ll L$

代表性体积元 (RVE)

局部平均密度

三个尺度区间

## 柯西面力矢量

截面法:  $t(n) = \lim(\Delta F / \Delta S)$

依赖于截面法向  $n$

体积力 vs 表面力

量级分析: 面积项  $O(h^2)$

## 柯西应力定理

柯西引理:  $t(-n) = -t(n)$

四面体推导

线性关系:  $t(n) = \sigma \cdot n$

9个应力分量

## 二阶张量的本质

线性映射: 矢量  $\rightarrow$  矢量

双下标约定: 输出—输入

正应力 vs 剪应力

对称性 (角动量平衡)

# 本章关键公式回顾

**柯西应力公式：**  $t_i(n) = \sigma_{ij} n_j$  （指标形式，爱因斯坦求和约定）

物理意义：面力矢量是应力张量作用在法向量上的结果。

**柯西引理：**  $t(-n) = -t(n)$

物理意义：截面两侧的作用力大小相等、方向相反（牛顿第三定律）。

**正应力：**  $\sigma_n = n \cdot t = n_i \sigma_{ij} n_j$

物理意义：面力矢量在截面法向上的投影，导致拉伸或压缩变形。

**剪应力：**  $|\tau| = \sqrt{|t|^2 - \sigma_n^2}$

物理意义：面力矢量在截面切向上的分量，导致剪切变形。

# 本章能力目标回顾

---

1. **概念理解**：能解释连续介质假设的尺度分离条件，说明RVE的物理含义。

2. **数学表达**：能写出柯西应力公式，说明每个符号的物理意义和下标约定。

3. **推导能力**：能叙述柯西四面体推导的思路，解释体积项消失的量级分析。

4. **工程应用**：能根据应力张量和截面法向计算面力、正应力和剪应力。

5. **计算实践**：能用Python/NumPy实现应力分析，验证理论结果。

# 本章核心物理图像

## 尺度分离

微观涨落 → 连续介质平台 → 宏观非均匀  
RVE是物理概念，  
不是数学极限点

## 截面法

假想截面 → 面力矢量  
面力依赖于截面方向，  
是定向面积上的作用力

## 线性映射

法向量 → 应力张量 → 面力矢量  
9个分量描述  
无穷多截面的受力状态

## 量级分析

面积  $O(h^2)$  vs 体积  $O(h^3)$   
局部尺度上，  
表面力主导平衡

# 课后任务

---

## 课后任务

- **概念辨析：**用自己的话解释"为什么应力张量是二阶张量"，并举一个工程例子。
- **公式推导：**独立推导柯西应力公式，写出每一步的物理依据。
- **计算练习：**给定应力张量，计算3个不同截面上的正应力和剪应力。
- **编程实践：**用Python实现通用截面应力分析函数，并用3个测试用例验证。

---

# 第1章 结束

---

张量分析的物理与几何基础

徐翱 景泽 编著

西北工业大学 · 极端力学研究院